均時差を近似する．さらにアナレンマをかいてみる

1　はじめに

日時計を使えば時刻を知ることができるが，この際，均時差による補正を行わなければならない．例えば東経 135°における太陽の南中時刻は必ずしも日本標準時の正午とは限らないわけである．よくある勘違いに，たとえば冬至の日の出時刻が最も遅いと思っている人が多いことが挙げられる．これは間違いで，実際日の出が最も遅いのは 1 月の上旬である．これも均時差による．均時差が生じる原因は二つある．一つは地球の公転運動が円運動ではなく楕円運動であることである．もうひとつは地軸が公転面に対して傾いていることによる．この頁では均時差を簡単な三角関数で近似してみようと思う．つまり近時差の近似というわけである．

2　均時差の定義

日本の場合東経 135 度において 12 時から太陽が南中する時刻を引いた時間が均時差である．均時差が正のときは太陽は 12 時より早く南中する．負の時はその反対である．南中時刻から 12 時を引くという定義も存在し，その場合は正負が逆になる．南中時刻以外の均時差は後述の平均太陽との差で定義する．

3　二つの仮想太陽

あくまで近似なので事象を単純化して考えることにする．まず最初に二つの仮想太陽を定義しよう．第一の仮想太陽は黄道上を等角速度で移動する「**力学的平均太陽**」である．地球の公転が完全な円運動だとした場合の仮想太陽である．第二の仮想太陽は天の赤道上等角速度で移動する「**天文学的平均太陽**」である．これは公転が円運動で地軸も垂直である場合の平均太陽である．この天文学的平均太陽に対しては近時差は 0 である．つまり均時差を求めるということは**真太陽**と天文学的平均太陽の赤経の差を時間に直したものである．

二つの仮想太陽は同時に春分点を通過し，1 太陽年をかけて一周する．定数として次の数値を用いる．

太陽年：	$y = 365.2422$ 日
離心率：	$\epsilon = 0.0167$
近日点と冬至の差：	12.9889°
地軸の傾き：	23.4°

均時差を二つに分けて考えよう．まず真太陽と力学的平均太陽の差を**平均差**と呼ぶことにしよう．また力学的平均太陽と天文学的平均太陽の差を**赤道への整約**と呼ぶことにする．

4　平均差

図 1 は同時刻の太陽と地球，仮想太陽と仮想地球を表した，北極側から見た図である．楕円は誇張してかいてある．図における，

$$\theta - \phi$$

が平均差を表している．$\phi - \theta$ とする定義もある．先ほど，二つの平均太陽は同時に春分点を通過すると書いたが，これは幾何学的な春分点をさし，時刻の春分点ではない．時刻の春分点では仮想太陽は幾何学的春分点

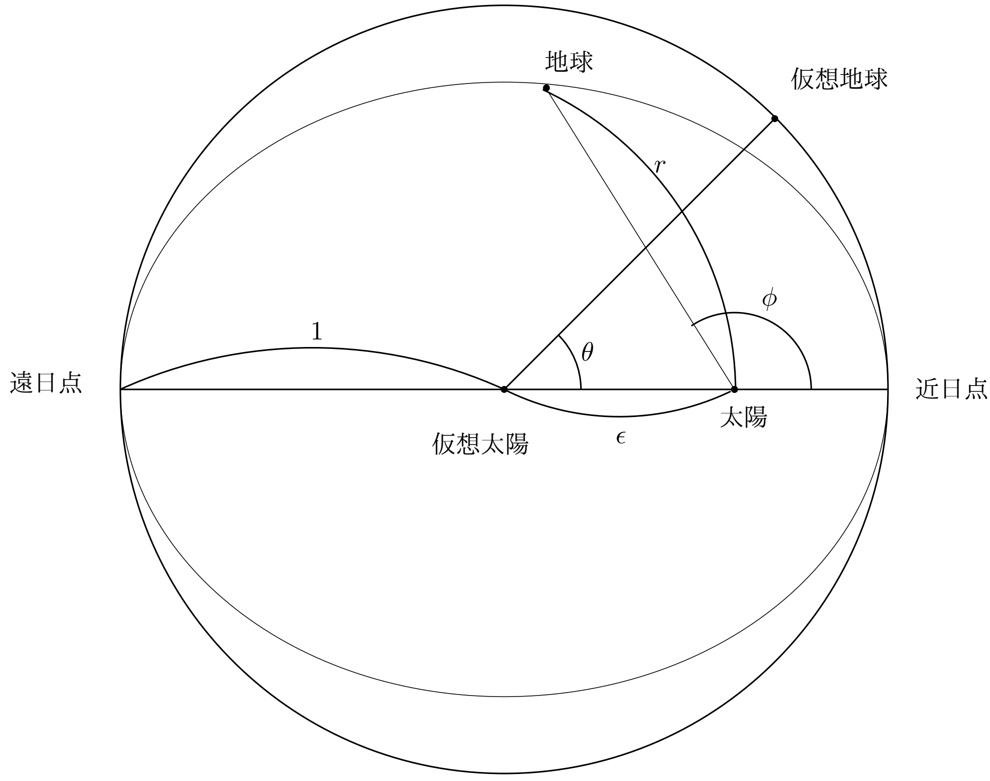


図 1　平均差

にいない．それでは力学的平均太陽と真太陽が重なるのはどこであろう．それは近日点と遠日点の二つである．こうしないと，南中時刻の平均が正午にならない（日本の場合東経 135°において）．もっとも近日点も遠日点もわずかに動いている．それを問題にすると話が複雑になるので固定して考えることにする．

ケプラーの第二法則により，平均差が最大，または最小になるのは真太陽がほぼ楕円の短軸の両端にあるときである（詳細は後述する）．最小（負で絶対値が最大のときという意味）になるときは近日点から真太陽が 90°回った点より概ね　ϵ ラジアンだけ多く回っている．それに対し力学的仮想太陽はほぼ同じ角度だけ遅れているので，真太陽と力学的仮想太陽の角度の差は，

$$2\epsilon(\mathrm{rad}) = 1.913767^\circ$$

である．360°を　24 時間で換算すると，この角度は時間で

$$\frac{1.913767}{360} \times 24 \times 60 = 7.655\,(分)$$

と表される．つまり，平均差の近似式は次のようになる．

$$-7.655 \sin \frac{d}{y} 360^\circ$$

ただし，d は近日点からの日数である．マイナスの符号は直感的にはなかなか理解できないが，近日点直後で考えれば真太陽は力学的平均太陽よりも速く進むので，その分を引かなくてはならない．もちろんこの式は近似式である．楕円運動の角度の変化を有限個の三角関数の和で表すことはできない．

5　赤道への整約

次に赤道への整約を求めてみよう．二つの仮想太陽は春分点を同時に出発し，秋分点で再び重なるのであるが，それ以外に夏至と冬至においてその赤経が等しくなる．この４つの時点でもしたまたま１つの仮想太陽が南中すれば他の仮想太陽も南中していることになる．図示してみよう**図 2.**

天球を外側から見た図である．地球側から見た図は左右逆で左が夏至になる．便宜上平面に描いたが，実際は球面三角形である．図上の直線及び円弧は全て単位球面上の直線（大円）である．長さも角度になっている．$\triangle VST$ は $VS = VT$ である二等辺三角形で，$\angle VST = 90^\circ$ であるが，　$\angle VTS = 90^\circ$ でもある．つまり二直角二等辺三角形である．平面に描いたため正確には表せない．$\triangle VMN$ は一直角不等辺三角形で，$\angle VMN = 90^\circ$ であるが，　$\angle VNM = 90^\circ$ ではない．また，点　M は線分 VS の中点であるが，点 N は線分 VT の中点ではない．この２本の線分 VM, VN の長さの差が赤道への整約の最大値（最小値）となる（あくまでも近似的に）．それでは計算してみよう．

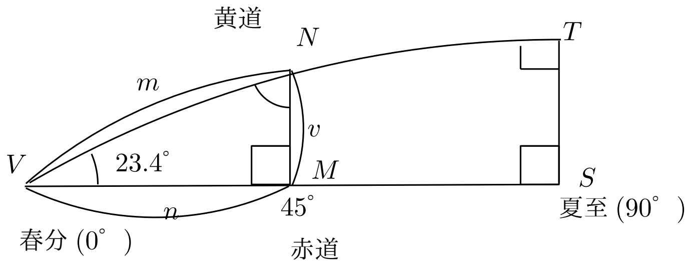


図 2　赤道への整約

球面正弦余弦定理より

$$\sin v \cos M = \cos m \sin n - \sin m \cos n \cos V$$

$V = 23.4^\circ$ ，$M = 90^\circ$ ，$n = 45^\circ$ を代入すると，

$$0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \cos m - \frac{1}{\sqrt{2}} \sin m \cos 23.4^\circ$$

$$0 = \cos m - \sin m \cos 23.4^\circ$$

$$\tan m = \frac{1}{\cos 23.4^\circ}$$

$$\begin{aligned}
\tan(m - 45^\circ) &= \frac{\tan m - 1}{1 + \tan m} \\
&= \frac{\dfrac{1}{\cos 23.4^\circ} - 1}{\dfrac{1}{\cos 23.4^\circ} + 1} \\
&= \frac{1 - \cos 23.4^\circ}{1 + \cos 23.4^\circ} \\
&= \tan^2 \frac{23.4^\circ}{2} = 0.042886 \\
b - 45^\circ &= \arctan 0.042886 = 2.4557^\circ
\end{aligned}$$

これを時間に直すと

$$\frac{2.4557}{360} \times 24 \times 60 = 9.823\,(分)$$

と表される．つまり，赤道への整約の近似式は次のようになる．

$$9.823 \sin \frac{d'}{y} 720^\circ$$

ただし，d' は春分点からの日数である．春分直後であれば力学的平均太陽は天文学的平均太陽に赤経の値で遅れをとるので，その分だけたさなければならない．よって符号はプラスである．（春分直後の太陽は平均太陽より正午に右側にある．）また周期は 180°つまり半年であることに注意しなければならない．これで主要な計算は終わった．あとはこの二つを加えるだけであるが，どの時点を基準にするか決めなければならない．近日点から春分までの日数を f とすれば，

$$-7.655 \sin \frac{d}{y} 360^\circ \quad + 9.823 \sin \frac{d-f}{y} 720^\circ$$

となる．単位は時間の分である．各変数の定義を再掲すれば d は近日点からの日数．f は近日点から春分点までの日数．y は 1 太陽年つまり，365.2422 日である．

冬至から近日点までの角度が分かっているので，近日点から春分までの角度は，

$$90^\circ - 12.9889^\circ = 77.0111^\circ$$

これを用いると

$$-7.655 \sin \frac{d}{y} 360^\circ \quad + 9.823 \sin \left(\frac{d}{y} 720^\circ \quad - 154.0222^\circ \right)$$

グラフを grapes で描いてみた（**図 1**）．入力した式は

$$-7.655 sin(x/365.2422 * 360^\circ \ ) + 9.823 sin(x/365.2422 * 720^\circ \quad - 154.0222^\circ \ )$$

である．普通，均時差のグラフは 1 月 1 日を原点としてかくことが多いので，その場合は近日点のぶんだけ（3 日ほど）右に平行移動しなければならない．

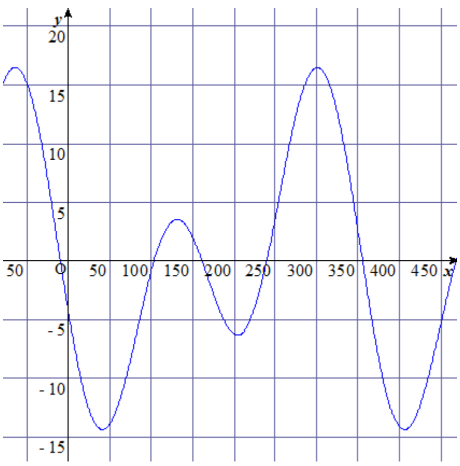


図 3

補足 1　milne の公式との差異

milne の公式では

$$-7.657sinM + 9.862sin(2M + 3.599)$$

となっておりわずかな差がある．係数-7.657 のほうは離心率の有効数字を増やせば等しくなる．9.862 の方は近似の取り方が違う．どちらにしても大きな差はない．詳細は 添付ファイル (xlsx)（←ここをクリック，マクロ不使用）を参照されたい．（Fire Fox ではうまくダウンロードできない）

補足 2　平均差が最大（最小）となるのはいつか

先ほど，平均差が極値をとるのは短軸の両端付近であると書いたが，実際はどうなのだろうか．力学的平均太陽の軌道を単位円，真太陽の軌道を長軸半径 1 短軸半径 b とする（**図 1** 参照）．仮想太陽の面積速度を ΔS，真太陽の面積速度を $\Delta S'$ とすると，楕円の面積は単位円の面積の b 倍であるから，S, S' も同じ比で，

$$\Delta S' = b\Delta S$$

仮想太陽の角速度を $\Delta\theta$，真太陽の角速度を $\Delta\phi$ とすると，

$$2\Delta S = 1^2 \times \Delta\theta$$
$$2\Delta S' = r^2 \times \Delta\phi$$

平均差が極値をとるのは

$$\Delta\theta = \Delta\phi$$

のときであるから，これら四つの式を連立して，

$$r = \frac{1}{\sqrt{b}}$$

を得る．$b < 1$ であるから $r > 1$，短軸の両端で $r = 1$ であるので，平均差が極値となるのはそこよりも遠日点側にすこし動いた点にある．これを楕円の方程式

$$r = \frac{1 - \epsilon^2}{1 + \epsilon\cos\phi}$$

に代入して解くと，

$$\cos\phi = \frac{(1 - \epsilon^2)^{\frac{5}{4}} - 1}{\epsilon}$$

を得る．これは

$$\phi = 91.196^\circ$$

に相当する．真太陽で言うと，短軸から ϵ ラジアン弱遠日点寄り，仮想太陽でいうと近日点と遠日点の中間時点よりわずかに近日点寄りのところにある．

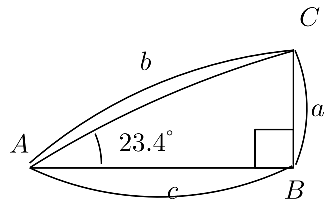
補足 3　赤道への整約が最大（最小）となるのはいつか

平均差は直感的にとらえやすいが，赤道への整約は球面座標を考えなければならないので難しい．
次のような，球面一直角三角形を考えて，調べてみよう．

$$0 = \cos b \sin c - \sin b \cos c \cos 23.4^\circ$$

$\cos 23.4^\circ\ = k$ とおくと，

$$\tan c = k \tan b$$



$$\tan(b-c) = \frac{(1-k)\tan b}{1+k\tan^2 b}$$

$\tan b = x$ とおき x で微分し，それが 0 になるところを求めると，

$$x = \tan b = \sqrt{\frac{1}{k}}$$

を得る．

$$b = 46.229^\circ$$

これは黄経でいうと，春分点と夏至の中間より，つまり 45° より　1.229 度多く回ったところに相当する．一方 c は

$$c = 43.771$$

であるので，45° やや手前というわけである．このとき　$b + c = 90^\circ$ である．このとき

$$b - c = 2.457957$$

であるので，先ほどの近似式のときの値よりわずかに大きい．

補足 4　理科年表 2010 によれば近日点離角は 102.972°，　2011 年版では 102.976° である．

補足 5　天文年鑑 2004 年版（誠文堂新光社）によれば地球の離心率は 0.1671 でさらに

$$\begin{aligned} \epsilon &= 0.016709 - 0.000042T \\ T &= d/36525 \\ d &= JD - 2451545.0 \\ JD &: \text{ユリウス日} \end{aligned}$$

$d = 0$ は 2000 年正午 UT を表す．正確には閏秒の影響を排除した，2000 年 1 月 1 日 11:58:55.816 UTC である．この補足はこの頁とはあまり関係がないが，付随的に調べたので記しておく．

補足 6　均時差が起こることによって，毎日の同時刻の太陽をプロットすると，8 の字の軌跡が描ける．この軌跡をアナレンマと呼ぶ．平均差による軌跡は楕円となり，赤道への整約による軌跡は上下大きさの同じ 8 の字になる．この二つを合成すると上下の大きさが異なる 8 の字となる．このアナレンマを用いた均時差補正の必要のない日時計もある．

先ほど求めた均時差の近似式を用いてアナレンマをかいてみよう．先ほどの近似式は近日点を原点にしてあった．これを春分点を原点にもっていこう．

$$-7.655\sin\left(\frac{d}{y}360^\circ + 77.0111^\circ\right) + 9.823\sin\left(\frac{d}{y}720^\circ\right)$$

係数の-7.655 と 9.823 は時間の分を単位とする数字である．これを角度の°に直そう．これはのちほど登場する上下移動の単位とそろえるためである．つまり x 軸と y 軸の目盛の比を 1:1 にしたいのである．であるから，ラジアンにそろえても時間を単位としても別にかまわない．

$$\frac{-7.655}{60 \times 24} \times 360 = -1.91375(°), \frac{9.823}{4} = 2.45575(°)$$

より

$$-1.91375 \sin\left(\frac{d}{y}360° + 77.0111°\right) + 2.45575 \sin\left(\frac{d}{y}720°\right)$$

これで横軸方向は決まった．今度は縦軸方向の太陽の位置を求めよう．これは考え方がやさしい．つまり，天の赤道を単純に上下するだけである．

$$23.4 \sin\frac{d}{y}360°$$

でいいだろう．ただし公転軌道が楕円であるためこの式は正確ではない．春分から秋分は長いが秋分から秋分はそれより 7 日半ほど短いからである．これで役者は出そろったのでグラフにかいてみよう (**図 4**)．d を媒介変数として表す．grapes に入力した式は

$$\begin{cases} x = -1.91375 sin(t/365.2422 * 360^{\circ} \ + 77.0111^{\circ} \ ) + 2.45575 sin(t/365.2422 * 720^{\circ} \ ) \\ y = 23.4 sin(t/365.2422 * 360^{\circ} \ ) \end{cases}$$

である．

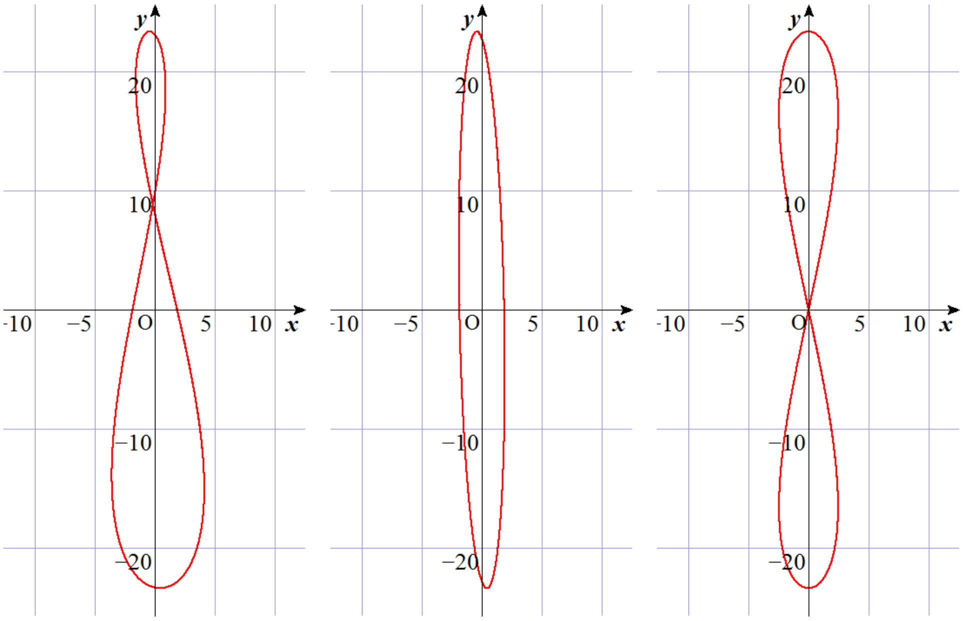


図 4　左からアナレンマ，平均差，赤道への整約